Комбинаторика – 1

6 класс. 6.06.2011

1. Десятичная запись восьмизначного числа состоит из четырех единиц и четырех троек. Из этого числа можно вычеркнуть 6 цифр так, чтобы осталось число 13. Приведите пример такого числа, для которого это вычеркивание можно сделать ровно 13 способами.

2. На доске 20×20 отмечены две клетки. Докажите, что доску можно по клеточкам разрезать на две равные части так, чтобы в каждой части было по отмеченной клетке.

3. В языке племени Абаба 2 буквы: “а” и “б”. Если в любом месте любого слова этого языка вставить или вычеркнуть буквосочетание “ааб” или буквосочетание “бба”, то смысл слова от этого не изменится. На скале нацарапано 100 слов на языке Абаба. Докажите, что среди них есть два, совпадающих по смыслу.

4. Среди 100 одинаковых по внешнему виду монет 99 настоящих и одна фальшивая. Все настоящие монеты весят одинаково, а фальшивая отличается от них по весу. Есть двухчашечные весы, на каждую чашку которых разрешается класть по одной монете. За какое наименьшее число взвешиваний с помощью этих весов можно найти фальшивую монету?

5. Есть клетчатый квадрат 10×10 клеток. Единичные отрезки красят в несколько цветов. Требуется чтобы в результате между любыми двумя узлами нашелся путь, в котором все единичные отрезки окрашены по-разному. Какое наименьшее число цветов понадобится?

6. На шахматной доске отмечено 37 клеток. Докажите, что если на отмеченные клетки можно поставить 8 не бьющих друг друга ладей, то это можно сделать хотя бы двумя способами.

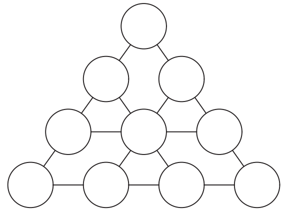
7. Петя и Вася по очереди выбирают числа из множества

$$\{1, 2, 3, \ldots, 2011\}.$$

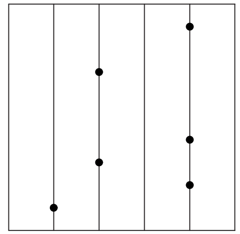
Начинает Петя. Игра заканчивается, когда все числа выбраны. Петя выигрывает, если сумма выбранных им чисел делится на 3. Кто выиграет при правильной игре?

Задачи с картинками

6 класс. 7.06.2011



1. Костя нарисовал картинку с 10 кружочками и расставил в кружочки натуральные числа. Кирилл выписал все возможные тройки чисел, лежащих на одной прямой, сумма которых нечетна; Саша выписал все возможные тройки чисел, лежащих на одной прямой, сумма которых четна. Докажите, что количество троек у Кирилла и у Саши различны.

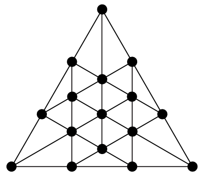


2. По n параллельным прямым дорожкам стартуют n бегунов. На линиях, разделяющих соседние дорожки, установлены флажки, флажки находятся на разных расстояниях от старта. Каждый спортсмен, добежав до очередного флажка, должен перепрыгнуть через него на соседнюю дорожку, продолжить бег по ней до следующего флажка, перепрыгнуть и т. д. (На рисунке показан возможный способ расстановки флажков для пяти дорожек.) Докажите, что если спортсмены стартуют на разных дорожках, то и финишируют тоже на разных дорожках.

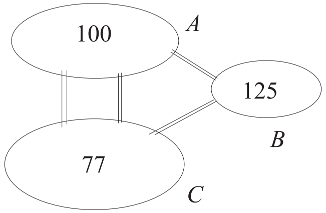
3. Сколько различных несамопересекающихся путей ведут из точки A в точку B (всего n полуокружностей)?

4. Рассмотрим числовой треугольник, в котором по сторонам расположены числа 0, 1, 2, 3, . . . , а внутри каждое число равно сумме двух соседних с ним чисел из предыдущей строки. Какой остаток при делении на 7 дает сумма чисел в 100-й строке (эта строка как раз и начинается с числа 100)?

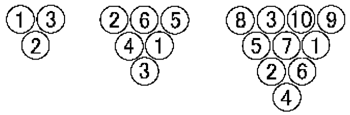
0
1 1
2 2 2
3 4 4 3
4 7 8 7 4
5 11 15 15 11 5



5. На картинке показано, как можно расположить 16 точек, чтобы образовалось 12 рядов по 4 точки. Можно ли на плоскости расположить 30 точек так, чтобы получилось 43 ряда по 5 точек?

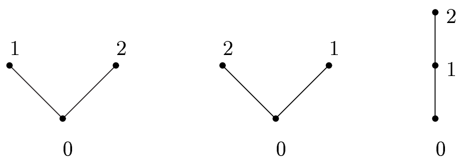


6. На острове A живет 100 человек, на острове B — 125 человек, а на острове C — 77 человек. Между островами есть мосты, как показано на рисунке. Время от времени с какого-то из островов по каждому его мосту на соседние острова переселяется по одному человеку. Может ли в результате получиться, что на острове A живет 77 человек, на острове B — 125 человек, а на острове C — 100 человек?



7. На картинке показано для $n = 3$, 6, 10, как можно разместить числа от 1 до n (при условии, что n — "треугольное" число), чтобы разность любых двух соседних по горизонтали чисел находилась как раз под ними. Докажите, что для $n = 21$ такое размещение невозможно.

8. Бригадир формирует бригаду из n рабочих, имеющих порядковые номера от 1 до n. У каждого, кроме бригадира (который имеет 0), должен быть ровно один начальник, имеющий номер, меньший, чем у подчиненного. Каждый начальник присваивает всем своим подчиненным звания: "первый помощник", "второй помощник" и т. д. Докажите, что бригаду можно сформировать $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$ способами. Ниже показан пример организации разных бригад с двумя рабочими.



Алгебра и теория чисел – 1

6 класс. 8.06.2011

1. Двузначное число умножили на произведение его цифр и получили трехзначное число, записываемое тремя одинаковыми цифрами. Какое число умножали?

2. Расставьте в клетках таблицы 2×4 числа от 1 до 8 так, чтобы сумма чисел в любых соседних по стороне клетках была простым числом.

3. Трехзначное число, в записи которого нет нулей, умножают на сумму обратных величин к его цифрам. Докажите, что результат больше 135.

4. Число n поделили с остатком на $2, 3, 4, \ldots, 10$. Оказалось, что сумма полученных остатков делится на n. Какое наибольшее значение может иметь полученное при этом делении частное?

5. Приведите пример натурального числа, не делящегося на 11, которое разделится на 11, если любую из его цифр изменить на 1.

6. Все десятизначные числа, составленные из цифр 1 и 2, поделили с остатком на 1024. Сколько различных остатков получилось?

7. На доске написано 100 попарно различных натуральных чисел. Докажите, что можно выбрать два таких числа, что их сумма и их разность обе не являются степенями двойки.

Комбинаторика – 2
6 класс. 10.06.2011

1. Несколько лыжников стартовали один за другим по одной и той же прямолинейной дистанции с интервалом в одну минуту. Оказалось, что для любых двух лыжников один из них обогнал другого ровно один раз, кроме Петтера Нортуга и Евгения Устюгова, которое друг друга не обгоняли ни разу. Докажите, что эти два лыжника стартовали один за другим.

2. По кругу лежат 50 монет, одна “орлом”, остальные — “решкой”. Монета называется *хорошей*, если среди трех монет: ее и двух соседей имеется нечетное число “орлов”. Каждую минуту все хорошие монеты одновременно переворачиваются. Может ли так случиться, что все монеты через некоторое время будут лежать “орлом”?

3. Докажите, что клетки доски 8×8 нельзя так раскрасить в черный и белый цвет, чтобы в любом квадрате 4×4 черных клеток было больше, чем белых, а в любом прямоугольнике 3×5 черных клеток было меньше, чем белых.

4. На острове живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Несколько (менее 100) островитян встретились и каждый из них сказал про каждого из остальных рыцарь тот, или лжец. Фраза *Ты — лжец!* прозвучала ровно 286 раз. Сколько раз прозвучала фраза *Ты — рыцарь!*?

5. Выпуклый 24-угольник разбит на треугольники непересекающимися диагоналями. Треугольники окрашены в черный и белый цвета в шахматном порядке. Докажите, что получилось не более 15 белых треугольников.

6. В группе из семи ребят для любых двоих ребят A и B найдутся хотя бы двое, каждый из которых знаком и с A, и с B. Верно ли, что кто-то из ребят знаком со всеми остальными?

7. Рассмотрим фигуру, образованную всеми клетками диагонали квадрата 20×20, идущей из правого нижнего угла в левый верхний, а также всеми клетками, лежащими выше этой диагонали. Эта фигура разбита на клетчатые прямоугольники с попарно различными площадями. Сколько прямоугольников могло получиться?

Конструкции и алгоритмы
6 класс. 11.06.2011

1. Трехзначное число делится на 7 и все числа, получающиеся из него перестановкой цифр (при этом разрешается ставить 0 в начало числа), тоже делятся на 7. Найдите все такие числа.

2. С числом разрешается проделывать следующую операцию: выбрать цифру в его десятичной записи и прибавить её к числу или вычесть её из числа. Можно ли с помощью нескольких таких операций получить из числа 2011 число 96?

3. На складе имеется бесконечное количество изначально пустых баночек. Каждую минуту на склад прилетают две пчелы, приносят по 1 г мёда и каждая помещает свой мёд в любую банку, может быть, в одну. Потом прилетает Карлсон и съедает весь мёд из одной банки. Смогут ли пчёлы заполнить хоть одну баночку доверху? В банке помещается 10 г мёда.

4. Маляр последовательно красит клетки доски 100×100 в n цветов, соблюдая единственное правило: в одной вертикали и в одной горизонтали не должно быть клеток, покрашенных одинаково. Маляр уже покрасил какие-то двести клеток. При каком наименьшем n он гарантированно сможет правильно докрасить доску?

5. Петя пишет на доске натуральное число $N > 2011$. Вася заменяет его на меньшее натуральное число, но не меньшее суммы его цифр. Затем Петя таким же образом заменяет новое число, и т. д. Тот, кто не может ходить проигрывает. Приведите пример числа N, для котрого Петя выиграет.

6. Среди 25 монет две фальшивые. Имеется прибор, в который можно положить две монеты, и он покажет, сколько из них фальшивых. Определите обе фальшивые монеты за 13 испытаний.

7. С натуральным числом разрешается проделывать следующие операции: простую — прибавить к нему или вычесть 1561; и сложную — отрезать последнюю цифру, результат умножить на 3 и прибавить к тому, что получилось, отрезанную цифру. Докажите, что из числа 1102 нельзя получить 2011.

8. Как из картонного квадрата вырезать развертки трёх одинаковых кубов, чтобы обрезков осталось меньше 30 %? Развёртка куба — это фигура, составленная из шести квадратов, согнув которую можно получить поверхность куба, у которого каждый квадрат является гранью.

Алгебра и теория чисел – 2

6 класс. 12.06.2011

1. Решите ребус: $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = 2011$.

2. Существует ли натуральное число, которое при вычеркивании своей первой цифры уменьшается ровно в 2011 раз?

3. Из трех различных цифр составили 6 различных трехзначных чисел (каждая цифра входит в запись по одному разу). Докажите, что если сложить три из этих трехзначных чисел и из результата вычесть сумму трех оставшихся чисел, то полученный ответ будет делиться на 18.

4. Числа от 1 до 37 выписаны в строчку так, что при всех k сумма первых k чисел в этой строке делится на $(k+1)$-е число. Первое число в этой строке — 37. Найдите последнее число.

5. На доске написаны различные натуральные числа, не превосходящие 2011. При этом любые два числа на доске имеют общий делитель больший 1. Какое наибольшее количество чисел может быть написано на доске?

6. Докажите, что среди чисел, составленных из ста семерок и одной тройки, более половины — составные.

7. Найдите максимальное 100-значное число, которое нельзя представить ни в виде суммы двух квадратов, ни в виде разности двух квадратов натуральных чисел.

Комбинаторика – 1

7 класс. 6.06.2011

1. Среди 100 одинаковых по внешнему виду монет 99 настоящих и одна фальшивая. Все настоящие монеты весят одинаково, а фальшивая отличается от них по весу. Есть двухчашечные весы, на каждую чашку которых разрешается класть по одной монете. За какое наименьшее число взвешиваний с помощью этих весов можно найти фальшивую монету?

2. На доске 100×100 отмечены две клетки. Докажите, что доску можно по клеточкам разрезать на две равные части так, чтобы в каждой части было по отмеченной клетке.

3. В языке племени Абаба 2 буквы: “а” и “б”. Если в любом месте любого слова этого языка вставить или вычеркнуть буквосочетание “ааб” или буквосочетание “бба”, то смысл слова от этого не изменится. На скале нацарапано 100 слов на языке Абаба. Докажите, что среди них есть два, совпадающих по смыслу.

4. Имеется набор из 200 карточек: 100 красных и 100 синих. По кругу сидят 100 игроков. Каждому из них раздали две одноцветные карточки. Каждую минуту каждый игрок передает соседу слева одну красную карточку, а если это невозможно, то одну синюю карточку. Докажите, что через несколько минут у всех игроков будут разноцветные карточки.

5. На шахматной доске отмечено 37 клеток. Докажите, что если на отмеченные клетки можно поставить 8 не бьющих друг друга ладей, то это можно сделать хотя бы двумя способами.

6. Петя и Вася по очереди выбирают числа из множества $\{1, 2, 3, \dots, 2000\}$. Начинает Петя. Игра заканчивается, когда все числа выбраны. Петя выигрывает, если сумма выбранных им чисел делится на 3, в противном случае выигрывает Вася. Кто выиграет при правильной игре?

7. Замок сейфа состоит из трех дисков, каждый из которых может находиться в одном из 8 положений. Одна из комбинаций положений всех трех дисков должна открывать сейф, но дефект в конструкции привел к тому, что сейф открывается, даже если только два диска из трех находятся в правильном положении. Как за 32 попытки открыть сейф? (Попыткой называется установка всех трех дисков в какое-то положение.)

8. На каждой клетке доски 17×17 записано число 0. За одну операцию можно взять 5 подряд идущих клеток по вертикали, горизонтали или диагонали и прибавить ко всем этим числам по 1. Можно ли такими операциями сделать все числа нечетными?

Геометрия – 1

7 класс. 7.06.2011

1. Биссектриса угла B треугольника ABC пересекает среднюю линию, параллельную стороне AC, в точке P. Докажите, что $\angle APB > 90°$.

2. В четырехугольнике $ABCD$ есть 2 параллельные стороны, а длины сторон удовлетворяют равенству

$$|AB| - |BC| = |BC| - |CD| = |CD| - |DA|.$$

Докажите, что четырехугольник — ромб.

3. На дно горизонтальной прямоугольной коробки $PQRS$ кладут бутылки (тоже горизонтально). В коробке достаточно места, чтобы в нижнем ряду поместилось 3 бутылки A, B, C, но не хватает места для четырех. Поверх этих трех бутылок во второй ряд естественным образом помещаются две бутылки D и E. В третий ряд кладут три бутылки. Поскольку бутылки не закреплены жестко, “слои” уложенных бутылок могут быть по-разному “наклонены”. Докажите, что центры бутылок третьего слоя лежат на одной прямой.

4. Два одинаковых прямоугольника расположены так, что вершины A и B второго прямоугольника лежат на сторонах первого. Что больше по площади – пересечение прямоугольников или часть второго, лежащая вне первого?

5. Какое наименьшее количество выпуклых 5-угольников нужно приложить друг к другу так, чтобы получился выпуклый 2011-угольник?

6. На плоскости дана прямая и 2011 точек, причем расстояние от любой точки до прямой не превосходит 1, а расстояние между любыми двумя точками не менее 2. Докажите, что какие-то 2 точки находятся на расстоянии не менее 1000.

7. Дан остроугольный треугольник ABC. Точка A_1 симметрична точке A относительно прямой BC. Точка B_1 симметрична точке B относительно прямой AC. Высоты треугольника ABC, в частности, прямые AA_1 и BB_1, пересекаются в точке H. На продолжении луча HC за точку C нашлась такая точка P, что $\angle HB_1P = 60°$ и $\angle HA_1P = 120°$. Найдите угол ABC.

Алгебра и теория чисел – 1

7 класс. 8.06.2011

1. Расставьте в таблице 2×4 числа от 1 до 8 по одному разу таким образом, чтобы сумма любых двух чисел, стоящих в соседних по стороне клетках, была простым числом.

2. Двузначное число умножили на произведение его цифр и получили трехзначное число, состоящее из одинаковых цифр. Каким могло быть исходное двузначное число?

3. Натуральное число n поделили с остатком на $2, 3, 4, 5, 6, \ldots, 1000$ и все полученные остатки сложили, а затем эту сумму поделили на n. Какое наибольшее число могло получиться в итоге?

4. На доске написаны 100 попарно различных натуральных чисел. Докажите, что из них можно выбрать два, у которых ни сумма, ни разность не являются степенями двойки с натуральным показателем.

5. Найдите все тройки натуральных чисел x, y, z, такие что

$$x^3 + y^3 = 2z^3$$

и число $x + y + z$ простое.

6. На доске выписаны числа $1, 2, 3, \ldots, 9$. Разрешается стереть два (возможно, равных) числа a и b и написать вместо них ab и $a + b$. Могут ли в какой-то момент 5 чисел на доске оказаться равными 1 000 001?

7. Назовем натуральные числа похожими, если в них поровну десятичных цифр, цифры во всех разрядах, кроме одного, совпадают, а в одном отличаются ровно на 1. Для каких n существует натуральное число, не кратное n, такое, что все похожие на него кратны n?

8. Пусть $\pi(x)$ — количество простых чисел, не превосходящих x, $f(n)$ — количество простых делителей n. Докажите, что

$$\pi(n) + \pi(\tfrac{n}{2}) + \ldots + \pi(\tfrac{n}{n}) = f(1) + \ldots + f(n).$$

Комбинаторика – 2

7 класс. 10.06.2011

1. На острове живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут, причем все жители разного роста и есть как рыцари, так и лжецы. Каждый из островитян произнес фразу: “на острове живет более 200 лжецов, которые ниже меня по росту”. Сколько лжецов может быть на острове?

2. По кругу лежат 50 монет, одна “орлом”, остальные — “решкой”, Монета называется *хорошей*, если среди трех монет: ее и двух соседей имеется нечетное число “орлов”. Каждую минуту все хорошие монеты одновременно переворачиваются. Может ли так случиться, что все монеты через некоторое время будут лежать “орлом”?

3. Какое наибольшее количество букв a и $б$ можно выписать в ряд, чтобы среди любых 9 подряд стоящих букв было больше половины букв a, а среди любых 11 подряд стоящих букв было больше половины букв $б$?

4. В группе из семи ребят для любых двоих ребят A и B найдутся хотя бы двое, каждый из которых знаком и с A, и с B. Верно ли, что кто-то из ребят знаком со всеми остальными?

5. Можно ли какой-нибудь прямоугольник разрезать по клеточкам на 2011 Г-тетрамино и несколько Z-тетрамино?

6. На столе по кругу расположено 20 фишек. Петя и Вася играют в следующую игру. Ходят по очереди, начинает Петя. Каждый из мальчиков своим ходом убирает со стола любые три фишки. Если две оставшиеся в конце фишки были соседними в исходном круге, побеждает Вася, в противном случае побеждает Петя. Кто из мальчиков имеет выигрышную стратегию?

7. Рассмотрим фигуру, образованную всеми клетками диагонали квадрата 20×20, идущей из правого нижнего угла в левый верхний, а также всеми клетками, лежащими выше этой диагонали. Сколькими способами эту фигуру можно разбить на клетчатые прямоугольники с попарно различными площадями?

8. Выпуклый 100-угольник разбит на треугольники непересекающимися диагоналями. Треугольники окрашены в черный и белый цвета в шахматном порядке. Какое наименьшее количество черных треугольников могло оказаться?

Геометрия – 2

7 класс. 11.06.2011

1. Биссектриса угла A трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекает сторону CD в точке M. Оказалось, что $CM = MD$. Докажите, что $AD + BC = AB$.

2. Биссектрисы углов A и C выпуклого равностороннего пятиугольника $ABCDE$ пересекаются в точке F. Оказалось, что точка F лежит внутри пятиугольника. Докажите, что $EF = FD$.

3. Отрезок биссектрисы из угла B треугольника ABC равен 2. Высота из вершины B равна 1. Чему может равняться разность углов A и C?

4. Внутри правильного треугольника ABC выбрана точка P. Докажите, что $\angle PAB + \angle PBC + \angle PCA > 60°$.

5. Биссектриса внешнего угла C треугольника ABC пересекает биссектрису внутреннего угла B в точке K. Оказалось, что $CB = CK$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

6. Множество точек на плоскости назовем *красивым*, если любое его трехточечное подмножество имеет ось симметрии. Обязательно ли красивое множество имеет ось симметрии?

7. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке K, а серединные перпендикуляры к сторонам AD и BC — в точке L. Диагонали четырехугольника пересекаются в точке O. Оказалось, что точка K внутри треугольника AOD, а точка L — внутри треугольника AOB. Докажите, что $\angle AKB = \angle CKD$ тогда, и только тогда, когда $\angle ALD = \angle BLC$.

8. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC$, а AD — биссектриса. Оказалось, что $AD+DB = AC$. Найдите угол ABC.

Алгебра и теория чисел – 2

7 класс. 12.06.2011

1. Существует ли натуральное число, которое при вычеркивании своей первой цифры уменьшается ровно в 2011 раз?

2. Числа от 1 до 12 разбили на две группы так, что произведение чисел в первой группе делится на произведение чисел во второй группе. Найдите наименьшее возможное значение частного.

3. Какое наибольшее количество чисел от 1 до 2011 можно выбрать так, чтобы любые два выбранных числа имели общий делитель, больший 1?

4. Натуральное число называется *пандигитальным*, если в его десятичной записи каждая из десяти цифр встречается ровно один раз. Какое наименьшее значение может принимать разность $m^2 - n^2$, где $m > n$ — пандигитальные числа?

5. Докажите, что если $a^2 + b^2 + (a+b)^2 = c^2 + d^2 + (c+d)^2$, то $a^4 + b^4 + (a+b)^4 = c^4 + d^4 + (c+d)^4$.

6. Для каких натуральных n существует натуральное число, являющееся произведением n различных простых, и для любого своего простого делителя p кратное $p-1$?

7. Докажите, что уравнение

$$x(x-2) = y(y^2 - y - 1)$$

имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

8. На доске написаны числа $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \frac{1}{2011}$. За один шаг можно стереть с доски два числа x и y и написать вместо них число $\frac{xy}{xy+(1-x)(1-y)}$. Какое число могло остаться на доске после 2009 шагов?

Комбинаторика – 1

8 класс. 6.06.2011

1. Среди 100 одинаковых по внешнему виду монет 99 настоящих и одна фальшивая. Все настоящие монеты весят одинаково, а фальшивая отличается от них по весу. Есть двухчашечные весы, на каждую чашку которых разрешается класть по одной монете. За какое наименьшее число взвешиваний с помощью этих весов можно найти фальшивую монету?

2. В языке племени Абаба 2 буквы: “а” и “б”. Если в любом месте любого слова этого языка вставить или вычеркнуть буквосочетание “ааб” или буквосочетание “бба”, то смысл слова от этого не изменится. На скале нацарапано 4 слова на языке Абаба. Докажите, что среди них есть два, совпадающих по смыслу.

3. Имеется набор из 200 карточек: по 100 красных и синих. По кругу сидят 100 игроков. Каждому из них раздали 2 одноцветные карточки. Каждую минуту каждый игрок передает соседу слева одну красную карточку, а если это невозможно, то одну синюю карточку. Докажите, что через несколько минут у всех игроков будут разноцветные карточки.

4. На шахматной доске отмечено 37 клеток. Докажите, что если на отмеченные клетки можно поставить 8 не бьющих друг друга ладей, то это можно сделать хотя бы двумя способами.

5. Петя и Вася по очереди выбирают числа из множества $\{1, 2, 3, \ldots, 2011\}$. Начинает Петя. Игра заканчивается, когда все числа выбраны. Петя выигрывает, если сумма выбранных им чисел делится на 3, в противном случае выигрывает Вася. Кто выиграет при правильной игре?

6. Замок сейфа состоит из трех дисков, каждый из которых может находиться в одном из 8 положений. Одна из комбинаций положений всех трех дисков должна открывать сейф, но дефект в конструкции привел к тому, что сейф открывается, даже если только два диска из трех находятся в правильном положении. Как за 32 попытки открыть сейф? (Попыткой называется установка всех трех дисков в какое-то положение.)

7. На каждой клетке доски 17×17 записано число 0. За одну операцию можно взять 5 подряд идущих клеток по вертикали, горизонтали или диагонали и прибавить ко всем этим числам по 1. Можно ли такими операциями сделать все числа нечетными?

8. Вася отметил на окружности несколько точек и некоторые пары точек соединил отрезками так, чтобы из каждой точки выходило ровно 10 отрезков. Потом Петя около каждой точки написал по 5 целых неотрицательных чисел. Докажите, что Вася может стереть несколько отрезков таким образом, чтобы для каждой точки количество выхожящих из нее отрезков не было равно ни одному из написанных возле этой точки чисел.

Геометрия – 1

8 класс. 7.06.2011

1. Отрезки AA_1 и BB_1 — биссектрисы треугольника ABC. Докажите, что $A_1B_1 < AB$.

2. Серединный перпендикуляр к биссектрисе угла A пересекает биссекрисы углов B и C треугольника ABC в точках M и N. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что точки A, M, N и I лежат на одной окружности.

3. На дно горизонтальной прямоугольной коробки $PQRS$ кладут бутылки (тоже горизонтально). В коробке достаточно места, чтобы в нижнем ряду поместилось 3 бутылки A, B, C, но не хватает места для четырех. Поверх этих трех бутылок во второй ряд естественным образом помещаются две бутылки D и E. В третий ряд кладут три бутылки. Поскольку бутылки не закреплены жестко, “слои” уложенных бутылок могут быть по-разному “наклонены”. Докажите, что центры бутылок третьего слоя лежат на одной прямой.

4. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом $\angle B$ угол $\angle A$ меньше угла $\angle C$. На медиане AM нашлась такая точка P, что $AP = PC$. Докажите, что $AC < 3BP$.

5. Какое наименьшее количество выпуклых 5-угольников нужно приложить друг к другу так, чтобы получился выпуклый 2011-угольник?

6. На плоскости дана прямая и 2011 точек, причем расстояние от любой точки до прямой не превосходит 1, а расстояние между любыми двумя точками не менее 2. Докажите, что какие-то 2 точки находятся на расстоянии не менее 1700.

7. В остроугольном треугольнике ABC, для которого $\angle A < \angle B$, точка H — ортоцентр, а точка O — центр описанной окружности. Известно, что $2\angle OHC = \angle BAC$. Найдите угол $\angle BAC$.

Алгебра и теория чисел – 1

8 класс. 8.06.2011

1. Расставьте в таблице 2×4 числа от 1 до 8 по одному разу таким образом, чтобы сумма любых двух чисел, стоящих в соседних по стороне клетках, была простым числом.

2. Натуральное число n поделили с остатком на 2, 3, 4, 5, 6, …, 1000 и все полученные остатки сложили, а затем эту сумму поделили на n. Какое максимальное число могло получиться в итоге?

3. На доске написаны 100 попарно различных натуральных чисел. Докажите, что из них можно выбрать два, у которых ни сумма, ни разность не являются степенями двойки с натуральным показателем.

4. Решите в целых числах уравнение $\quad (n+1)(2n+1) = 10m^2$.

5. Для положительных a и b докажите неравенство

$$\frac{1}{(a+\frac{1}{b}+2)} + \frac{1}{(b+\frac{1}{a}+2)} \leqslant \frac{1}{2}.$$

6. На доске выписаны числа 1, 2, 3, …, 9. Разрешается стереть два (возможно, равных) числа a и b и написать вместо них ab и $a+b$. Могут ли в какой-то момент 5 чисел на доске оказаться равными 1 000 001?

7. Найдите все такие тройки натуральных чисел x, y, z, что

$$x^3 + y^3 = 2z^3$$

и число $x + y + 3z$ простое.

8. Отрезок $[a, b]$ на числовой прямой не содержит целых точек. При каком наибольшем p можно утверждать наверняка, что для некоторого натурального n отрезок $[na, nb]$ не содержит целых точек и имеет длину хотя бы p?

Комбинаторика – 2

8 класс. 10.06.2011

1. На острове живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут, причем все жители разного роста и есть как рыцари, так и лжецы. Каждый из островитян произнес фразу: “на острове живет более 200 лжецов, которые ниже меня по росту”. Сколько лжецов может быть на острове?

2. По кругу лежат 2011 монет, одна “орлом”, остальные — “решкой”. Монета называется *хорошей*, если среди трех монет — ее и двух соседей — имеется нечетное число “орлов”. Каждую минуту все хорошие монеты одновременно переворачиваются. Может ли так случиться, что все монеты через некоторое время будут лежать “орлом”?

3. Дано 13 палочек, длины которых — попарно различные натуральные числа, не превосходящие 100. Докажите, что из этих палочек можно выбрать три палочки, из которых можно составить треугольник.

4. В группе из семи ребят для любых двоих ребят A и B найдутся хотя бы двое, каждый из которых знаком и с A, и с B. Верно ли, что кто-то из ребят знаком со всеми остальными?

5. Можно ли какой-нибудь прямоугольник разрезать по клеточкам на 2011 Г-тетрамино и несколько Z-тетрамино?

6. Выпуклый 24-угольник разбит на треугольники непересекающимися диагоналями. Треугольники окрашены в черный и белый цвета в шахматном порядке. Докажите, что получилось не более 15 белых треугольников.

7. Рассмотрим фигуру, образованную всеми клетками диагонали квадрата 20×20, идущей из правого нижнего угла в левый верхний, а также всеми клетками, лежащими выше этой диагонали. Сколькими способами эту фигуру можно разбить на клетчатые прямоугольники с попарно различными площадями?

8. На столе лежит куча из 1000 камней. Петя и Вася играют в следующую игру: они ходят по очереди, начинает Петя. Своим ходом каждый из игроков может взять из кучи на столе от 1 до 5 камней. Также в течение игры игроки могут делать исключительные ходы: брать 6 камней. Но это разрешается делать не более 10 раз в сумме для обоих игроков. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков имеет выигрышную стратегию?

Геометрия – 2

8 класс. 11.06.2011

1. Биссектриса угла A трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекает сторону CD в точке M. Оказалось, что $CM = MD$. Докажите, что $AD + BC = AB$.

2. Биссектрисы углов A и C выпуклого равностороннего пятиугольника $ABCDE$ пересекаются в точке F, лежащей внутри треугольника BDE. Докажите, что $\angle EFD = 2\angle EBD$.

3. Биссектриса внешнего угла C треугольника ABC пересекает биссектрису внутреннего угла B в точке K. Оказалось, что $AB = AK$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

4. Множество точек на плоскости назовем *красивым*, если любое его трехточечное подмножество имеет ось симметрии. Обязательно ли красивое множество имеет ось симметрии?

5. Даны три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Постройте циркулем и линейкой такую окружность с центром в точке C, что касательные из точек A и B к этой окружности параллельны и не совпадают.

6. Внутри правильного треугольника ABC выбрана точка P. Докажите, что $\angle PAB + \angle PBC + \angle PCA < 120°$.

7. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке K, а серединные перпендикуляры к сторонам AD и BC — в точке L. Диагонали четырехугольника пересекаются в точке O. Оказалось, что точка K внутри треугольника AOD, а точка L — внутри треугольника AOB. Докажите, что $\angle AKB = \angle CKD$ тогда, и только тогда, когда $\angle ALD = \angle BLC$.

8. На сторонах AF и DE правильного шестиугольника $ABCDEF$ отмечены отличные от его вершин точки M и N соответственно, причём $\angle MBN = 60°$. Пусть диагональ AD пересекает отрезки BN и BM в точках Q и P соответственно. Найдите отношение площадей треугольников BMN и BPQ.

Алгебра и теория чисел – 2

8 класс. 12.06.2011

1. Числа от 1 до 12 разбили на две группы так, что произведение чисел в первой группе делится на произведение чисел во второй группе. Найдите наименьшее возможное значение частного.

2. Докажите, что если $a^2 + b^2 + (a+b)^2 = c^2 + d^2 + (c+d)^2$, то $a^4 + b^4 + (a+b)^4 = c^4 + d^4 + (c+d)^4$.

3. Какое наибольшее количество чисел от 1 до 2011 можно выбрать так, чтобы любые два выбранных числа имели общий делитель, больший 1?

4. Натуральное число называется *пандигитальным*, если в его десятичной записи каждая из десяти цифр встречается ровно один раз. Какое наименьшее значение может принимать разность a) $m^2 - n^2$; b) $\sqrt{m} - \sqrt{n}$, где $m > n$ — пандигитальные числа?

5. Докажите, что уравнение

$$x(x-2) = y(y^2 - y - 1)$$

имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

6. В последовательности Сильвестра 2, 3, 7, 43, ... каждый следующий член равен произведению всех предыдущих, увеличенному на один. Сильвестр перемножил несколько различных членов своей последовательности и прибавил к результату 1. Получилось простое число. Докажите, что оно является членом последовательности Сильвестра.

7. Пусть $d(n)$ обозначает количество натуральных делителей числа n. Натуральные числа a и b таковы, что $d(na) \geqslant d(nb)$ при всех натуральных n. Докажите, что a делится на b.

8. На доске написаны числа $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \frac{1}{2011}$. За один шаг можно стереть с доски два числа x и y и написать вместо них число $\frac{xy}{xy+(1-x)(1-y)}$. Какое число могло остаться на доске после 2009 шагов?